

# Estimation des incidences à partir des données de médecine de ville du réseau Sentinelles \*

## Introduction

Ce document décrit l'estimation des incidences de grippe en France à partir des données recueillies auprès des médecins généralistes participant au réseau Sentinelles, c'est à dire les médecins volontaires pour assurer la surveillance et transmettant des données.

Les médecins du réseau Sentinelles ont la liberté de se connecter au « Site médecin » et de déclarer leurs cas au rythme qui leur convient. C'est pourquoi afin d'« harmoniser » les différentes déclarations des médecins et de réorganiser les données brutes en données hebdomadaires, un prétraitement des données brutes est nécessaire. Ce prétraitement consiste à calculer la participation hebdomadaire de chaque médecin et le nombre de cas affectés à chaque semaine (paragraphes 1 et 2).

Après ce prétraitement des données, l'incidence hebdomadaire peut être estimée en deux étapes : d'abord l'estimation du nombre moyen de cas par médecin à partir des données des médecins du réseau puis l'estimation du nombre total de cas en extrapolant l'information recueillie auprès des médecins du réseau à l'ensemble des médecins français. Les hypothèses permettant cette extrapolation sont les suivantes :

- **H1/** Les médecins participant au réseau Sentinelles constituent un échantillon aléatoire de l'ensemble des médecins français.
- **H2/** Les médecins déclarent en général une activité représentative de leur activité hebdomadaire (c'est à dire par exemple qu'on suppose qu'ils ne déclarent pas systématiquement des périodes de surveillance de trois jours dont deux non travaillés comme samedi-dimanche).

En pratique l'estimation de l'incidence nationale par le réseau Sentinelles est faite selon un découpage de la France en régions administratives qui peuvent elles-même être découpées en départements. Les estimations d'incidences sont donc dans un premier temps effectuées par zone, puis globalement. La dernière section décrit comment à partir des estimations d'incidences faites sur plusieurs zones, l'incidence est estimée pour le niveau supérieur (pays ou région) qui englobe ces zones (régions ou départements).

## 1 DESCRIPTION DES DONNEES BRUTES

Les données recueillies par le réseau pour le médecin  $i$  sont les suivantes :

- $(t_{i,1}, t_{i,2}, \dots, t_{i,k}, \dots)$  est la suite ordonnée des dates de déclaration,
- $(c_{i,1}, c_{i,2}, \dots, c_{i,k}, \dots)$  est la suite du nombre de cas associé à chaque date de déclaration. Si le médecin fait plusieurs déclarations le même jour, cette suite est agrégée de telle sorte que des cas rapportés indépendamment le même jour ne définissent qu'une seule et même déclaration.
- $\Delta_{\max}$  est le nombre maximal de jours autorisé entre 2 déclarations du médecin (12 jours). Ainsi  $\Delta_{ik}$  la durée de la  $k^{\text{ième}}$  période de surveillance du médecin  $i$  (en nombre de jours) vaut :
  - soit  $t_{i,k} - t_{i,k-1}$  dans le cas où  $t_{i,k} - t_{i,k-1} \leq \Delta_{\max}$ ,
  - soit  $\Delta_{ik}$  est demandé au médecin, avec la contrainte :  $1 \leq \Delta_{ik} \leq \Delta_{\max}$ . Autrement dit, si un médecin effectue une déclaration plus de  $\Delta_{\max}$  jours après la dernière en date, on lui demande le début de la période de surveillance concernée par cette nouvelle déclaration. Sinon, on suppose que la période de surveillance commence le lendemain de la précédente déclaration.

## 2 PRETRAITEMENT DES DONNEES BRUTES

**Calcul de la participation hebdomadaire et du nombre de cas imputés à chaque semaine**

Désormais on se place chronologiquement du point de vue d'une semaine  $s$  dont l'ensemble des sept dates qui la constituent est noté  $S(s)$ .

On veut estimer les quantités suivantes pour le médecin  $i$  :

- 1)  $n_i(s)$  le nombre des cas déclarés par le médecin  $i$  qui sont attribués à la semaine  $s$
- 2)  $p_i(s)$  la participation du médecin  $i$  pour la semaine  $s$ .

Tout d'abord pour chaque déclaration :

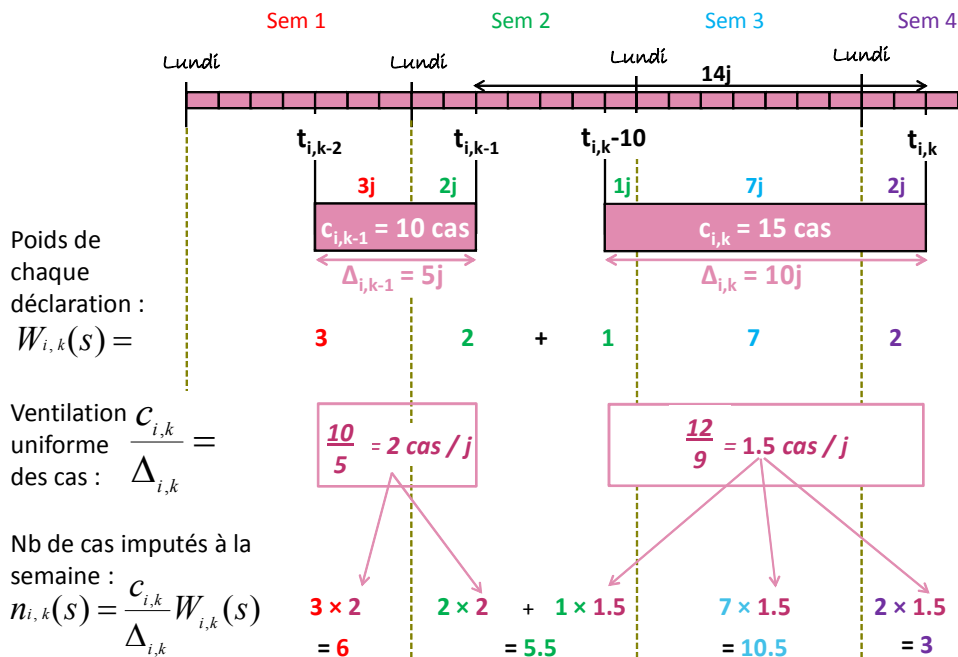
- on calcule son poids  $W_{i,k}(s)$  défini comme le nombre de jours concernés par la déclaration qui appartiennent à la semaine  $s$  :

$$W_{i,k}(s) = \sum_{j=t_{i,k}-\Delta_{i,k}+1}^{t_{i,k}} \mathbf{1}(j \in S(s)) \quad , \text{ pour } k \geq 2.$$

- le nombre de cas déclarés est réparti uniformément sur toute la durée concernée par la déclaration. Cela permet d'imputer un nombre de cas à la semaine  $s$  comme suit :

$$n_{i,k}(s) = \frac{c_{i,k}}{\Delta_{i,k}} W_{i,k}(s)$$

### Transformation de déclarations en données hebdomadaires



Ce schéma illustre le prétraitement de déclarations d'un médecin.

Sur ce schéma trois dates de connexion sont représentées : le jeudi de la semaine 1 à  $t_{i,k-2}$  , le mardi de la semaine 2  $t_{i,k-1}$  et le mardi de la semaine 4 à  $t_{i,k}$  .

Lors de la première connexion à  $t_{i,k-2}$  le médecin a fait une déclaration pour les jours passés qui n'est pas explicitée ici.

La connexion suivante est effectuée cinq jours plus tard soit le mardi de la semaine 2 au temps  $t_{i,k-1}$  : le médecin y déclare l'observation de dix cas depuis sa dernière connexion. Les dix cas observés sur cette période de cinq jours sont donc répartis uniformément sur cette période à raison de deux cas par jours. Parmi ces cinq derniers jours, trois appartiennent à la semaine 1 et deux à la semaine 2 donc avec la ventilation de deux cas par jour, les dix cas observés sont affectés aux semaines 1 et 2 de la façon suivante : six cas sont affectés à la semaine 1 et quatre cas à la semaine 2.

Ensuite le médecin ne se reconnecte à  $t_{i,k}$  que le mardi deux semaines plus tard (semaine 4). Comme sa dernière connexion à  $t_{i,k-1}$  date de plus de douze jours on lui demande d'indiquer quelle période concerne cette déclaration. Il déclare qu'au cours des dix derniers jours c'est à dire entre  $t_{i,k}-10$  et  $t_{i,k}$  il a observé quinze cas. Comme précédemment on peut voir sur le schéma que ces dix derniers jours couvrent les semaines 2, 3 et 4. Ainsi les quinze cas déclarés, avec une répartition uniforme de un cas et demi par jour, sont affectés aux semaines 2, 3 et 4 selon le nombre de jours de la semaine couverts par cette déclaration.

Ainsi on peut calculer pour chaque médecin :

- 1) Le nombre total de cas attribués à la semaine  $s$  pour le médecin  $i$  (dernière ligne sur le schéma):

$$n_i(s) = \sum_k n_{i,k}(s)$$

- 2)  $p_i(s)$  la participation du médecin  $i$  à la surveillance de la semaine  $s$ . C'est la somme des jours appartenant à la semaine  $s$  sur toutes ses déclarations, divisée par le nombre de jours de la semaine  $s$  :

$$p_i(s) = \frac{1}{\text{card}(S(s))} \sum_k W_{i,k}(s)$$

La participation d'un médecin à la surveillance de la semaine  $s$  est comprise entre 0 et 1. Elle vaut 1 si ses déclarations couvrent tous les jours de la semaine (c'est le cas du médecin sur la semaine 3 dans l'exemple) et sa participation vaut  $3/7$  s'il n'a surveillé que trois jours de la semaine, que ce soit en une seule déclaration (la participation du médecin à la semaine 1 est  $3/7$  dans l'exemple) ou en plusieurs déclarations (dans l'exemple, la participation à la semaine 2 est  $3/7$  en tout puisque ses deux déclarations couvrent en tout 3 jours sur cette semaine).

### 3 ESTIMATION DE L'INCIDENCE HEBDOMADAIRE POUR UNE ZONE $z$

#### 1. Estimation du nombre moyen de cas par médecin de la zone $\lambda_z(s)$

Soient les constantes :

- $d_z(s)$  le nombre de médecins qui ont fait une ou plusieurs déclarations couvrant la semaine  $s$  dans la zone  $z$ ,
- $m_z(s)$  le nombre total de médecins exerçant dans la zone  $z$ , au cours de la semaine  $s$ .

et soient les variables aléatoires propres à chaque médecin  $i$  de la zone  $z$ ,  $i \in \{1, \dots, d_z(s)\}$  :

- $N_{i,z}(s)$  le nombre des cas déclarés par le médecin  $i$  qui sont attribués à la semaine  $s$
- $P_{i,z}(s)$  la participation du médecin  $i$  pour la semaine  $s$ .

On suppose que :

- les  $N_{i,z}(s)$  et les  $P_{i,z}(s)$  sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées pour chaque médecin  $i$  de la semaine  $s$ , de la zone  $z$ .
- $N_{i,z}(s) | (P_{i,z}(s) = p_{i,z}(s))$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda_{i,z}(s) p_{i,z}(s)$ .  
D'après l'hypothèse précédente on a de plus :  $\forall i \in \{1, \dots, d_z(s)\}, \lambda_{i,z}(s) = \lambda_z(s)$ ,  
d'où  $\forall i \in \{1, \dots, d_z(s)\}, N_{i,z}(s) | (P_{i,z}(s) = p_{i,z}(s)) \sim P(\lambda_z(s) p_{i,z}(s))$

Notons que si  $p_{i,z}(s) = 1$  alors  $N_{i,z}(s) | (P_{i,z}(s) = 1) \sim P(\lambda_z(s))$  c'est à dire que  $\lambda_z(s)$  correspond à l'espérance du nombre de cas vus par un médecin de la zone  $z$  s'il surveille les 7 jours de la semaine  $s$ .

#### Calcul de l'estimateur de $\lambda_z(s)$ :

Par définition de la loi de Poisson on a  $E[N_{i,z}(s) | P_{i,z}(s)] = \lambda_z(s) P_{i,z}(s)$

Or par définition de l'espérance conditionnelle  $E[N_{i,z}(s)] = E[E[N_{i,z}(s) | P_{i,z}(s)]]$

ce qui nous permet d'écrire  $E[N_{i,z}(s)] = E[\lambda_z(s) P_{i,z}(s)] = \lambda_z(s) E[P_{i,z}(s)]$

ou encore :  $\lambda_z(s) = \frac{E[N_{i,z}(s)]}{E[P_{i,z}(s)]}$ .

Puisqu'un estimateur de  $E[N_{i,z}(s)]$  est la moyenne arithmétique  $\bar{N}_z(s) = \frac{1}{d_z(s)} \sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)$

et qu'un estimateur de  $E[P_{i,z}(s)]$  est la moyenne arithmétique  $\bar{P}_z(s) = \frac{1}{d_z(s)} \sum_{i=1}^{d_z(s)} P_{i,z}(s)$ ,

il vient naturellement qu'on peut estimer  $\lambda_z(s)$  par :

$$\hat{\lambda}_z(s) = \frac{\bar{N}_z(s)}{\bar{P}_z(s)} = \frac{\frac{1}{d_z(s)} \sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\frac{1}{d_z(s)} \sum_{i=1}^{d_z(s)} P_{i,z}(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} P_{i,z}(s)}$$

En annexe on peut lire la vérification du fait que  $\hat{\lambda}_z(s)$  est un estimateur sans biais de  $\lambda_z(s)$ .

### Variance de l'estimateur $\hat{\lambda}_z(s)$ conditionnellement à $\tilde{P}_z(s)$ :

La variabilité de  $\hat{\lambda}_z(s)$  est considérée conditionnellement à l'observation du vecteur des participations dans la zone  $z$ , la semaine  $s$ ,  $\tilde{P}_z(s) = [P_{1,z}(s), \dots, P_{d_z,z}(s)]$ .

Par définition de l'estimateur  $\hat{\lambda}_z(s)$  on a :

$$\text{var} \left[ \hat{\lambda}_z(s) \mid (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right] = \text{var} \left[ \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{d_z} \mid (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right] = \text{var} \left[ \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s)} \mid (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right]$$

soit

$$\text{var} \left[ \hat{\lambda}_z(s) \mid (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right] = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) \right)^2} \text{var} \left[ \sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s) \mid (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right]$$

Comme les  $N_{i,z}(s)$  suivent une loi de Poisson conditionnellement à  $P_{i,z}(s)$  leur somme suit également une loi de Poisson conditionnellement à  $\tilde{P}_z(s)$ , vecteur observé des  $P_{i,z}(s)$  :

$$\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s) \mid (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \sim P \left( \lambda_z(s) \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) \right)$$

Ce qui implique nécessairement  $\text{var} \left[ \sum_{i=1}^{d_z(s)} N_i | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right] = \lambda_z(s) \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s)$  .

Ainsi on obtient, par définition de  $\hat{\lambda}_z(s)$  :

$$\text{var} \left[ \hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right] = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) \right)^2} \text{var} \left[ \sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right]$$

ou encore :

$$\text{var} \left[ \hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right] = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) \right)^2} \lambda_z(s) \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) = \frac{1}{\left( \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) \right)} \lambda_z(s)$$

Finalement on peut estimer  $\text{var} \left[ \hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right]$  par  $\frac{1}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} p_i} \hat{\lambda}_z(s) = \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\left( \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) \right)^2}$ .

### Intervalle de confiance de $\lambda_z(s)$ :

On sait que  $\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \sim P \left( \lambda_z(s) \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) \right)$ .

Le paramètre  $\lambda_z(s) \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s)$  de cette loi correspond au nombre attendu de cas déclarés par les médecins du réseau sur la zone concernée.

A supposer que ce paramètre soit supérieur ou égal à 25, il est raisonnable de faire l'approximation suivante de la loi de Poisson par une loi normale :

$$\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \sim N \left( \lambda_z(s) \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s), \lambda_z(s) \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) \right)$$

Concernant l'estimateur  $\hat{\lambda}_z(s) = \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} P_{i,z}(s)}$  on peut donc faire l'hypothèse que sa distribution conditionnellement à  $\tilde{P}_z(s)$  est la suivante :

$$\hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \sim N \left( \lambda_z(s), \frac{1}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s)} \lambda_z(s) \right).$$

On retrouve bien le fait que cet estimateur est sans biais et que sa variance est égale à celle calculée plus haut.

Finalement, avec cette approximation normale, l'intervalle de confiance de niveau  $(1-\alpha)$  de  $\lambda_z(s)$  peut être donné par :

$$\left[ \hat{\lambda}_z(s) \pm u_\alpha \sqrt{\text{vâr}(\hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)))} \right]$$

i.e  $\left[ \hat{\lambda}_z(s) \pm u_\alpha \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\left(\sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s)\right)^2}} \right]$  ou encore  $\left[ \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s)} \pm u_\alpha \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s)} \right]$

**Attention, en pratique lorsqu'on a moins de 25 cas déclarés sur une zone on peut donc s'attendre à ce que l'intervalle de confiance de l'incidence estimée soit très grand du fait que l'hypothèse n'est pas vérifiée et que donc l'approximation normale n'est donc pas tout à fait valable.**

## 2. Estimation de $INC_z(s)$ l'incidence hebdomadaire sur la zone

Calcul de l'estimateur  $\hat{INC}_z(s)$  :

Soit  $INC_z(s) = \lambda_z(s) \times m_z(s)$ , l'incidence attendue sur la zone  $z$ , si chacun des  $m_z(s)$  médecins exerçant dans la zone  $z$  avait surveillé 7 jours pleins.



Notons que dans le calcul de  $INC_z(s)$ , l'hypothèse est faite que les  $m_z(s)$  médecins exerçant dans la zone  $z$  déclareraient, s'ils participaient à la surveillance, des nombres de cas suivant la même loi que les  $d_z(s)$  médecins participant au réseau de surveillance.

Un estimateur de  $INC_z(s)$  est donc  $INC_z(s) = m_z(s) \times \hat{\lambda}_z(s) = m_z(s) \times \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} P_{i,z}(s)}$

*En l'absence de données hebdomadaires sur le nombre de médecins exerçant dans chaque zone, on considère  $m_z(s)$  constant au fil des semaines c'est à dire qu'on fait comme si le nombre de médecins en activité dans la zone  $z$  était le même tout au long de l'année (en réalité moins de médecins travaillent en saison estivale et pendant les vacances de Noël par exemple donc les médecins sont peut être surchargés et l'incidence surestimée dans ces cas là?)*

Intervalle de confiance de  $INC_z(s)$  conditionnellement à  $\tilde{P}_z(s)$  :

De même,  $INC_z(s)$  l'espérance de l'incidence en médecine de ville dans la zone  $z$  durant la semaine  $s$ , conditionnellement à l'observation des  $P_i$  a 95% de chances de se trouver dans l'intervalle :

$$\left[ m_z(s) \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{d_z(s)} \pm 1,96 \times m_z(s) \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}}{d_z(s)} \right]$$

#### **4 ESTIMATION DE L'INCIDENCE AU NIVEAU SUPERIEUR (ENGLOBANT K ZONES)**

Le découpage en zones peut être celui de la France en  $K$  régions administratives ou bien celui d'une région administrative en  $K$  départements. On définit  $INC_G(s)$  l'incidence globale sur le territoire englobant  $K$  zones.

Estimateur de  $INC_G(s)$  conditionnellement aux  $\tilde{P}_z(s)$

Un estimateur de  $INC_G(s)$  l'incidence globale est  $\hat{INC}_G(s) = \sum_{z=1}^K \hat{INC}_z(s)$  avec  $\hat{INC}_z(s) (z=1, \dots, K)$  les incidences estimées par zone.

Intervalle de confiance de  $\hat{INC}_G(s)$  conditionnellement aux  $\tilde{P}_z(s)$

On suppose normale la distribution de l'estimateur  $\hat{\lambda}_z(s)$  à l'intérieur de chaque zone  $z$ , conditionnellement à l'observation de  $\tilde{P}_z(s)$  :

$$\hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \sim N(\lambda_z(s), \text{var}[\hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s))])$$

Or  $\hat{INC}_z(s) = \hat{\lambda}_z(s) \times m_z(s)$

D'où  $\hat{INC}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \sim N(m_z(s) \times \lambda_z(s), m_z(s)^2 \times \text{var}[\hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s))])$

La somme  $\sum_{z=1}^K Y_z$  de plusieurs variables  $Y_z$  qui suivent des lois normales de paramètres

$(\mu_k, \sigma_k)$  suit également une loi normale de paramètres :  $(\sum_{k=1}^{K_z} \mu_k, \sum_{k=1}^{K_z} \sigma_k)$ .

Donc  $\hat{INC}_G(s) = \sum_{z=1}^K \hat{INC}_z(s) \sim \left( \sum_{z=1}^K m_z(s) \times \lambda_z(s), \sum_{z=1}^K m_z(s)^2 \times \text{var}[\hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s))] \right)$

En utilisant les estimateurs

$$\hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) = \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s)} \quad \text{et} \quad \hat{\text{var}}[\hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s))] = \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\left( \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) \right)^2},$$

l'intervalle à 95% de  $\hat{INC}_G(s)$  conditionnellement aux  $\tilde{P}_z(s)$  peut être estimé par :

$$\left[ \sum_{z=1}^K \left( m_z(s) \times \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s)} \right) \pm 1,96 \sqrt{\sum_{z=1}^K \left( m_z(s)^2 \times \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\left( \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) \right)^2} \right)} \right]$$

## Annexe

Vérifions que  $\hat{\lambda}_z(s)$  est bien un estimateur sans biais de  $\lambda_z(s)$  ce qui signifie que  $E[\hat{\lambda}_z(s)] = \lambda_z(s)$ :

Notons  $\tilde{P}_z(s)$  le vecteur observé des  $P_{i,z}(s)$ .

Par propriété de l'espérance on a  $E[\hat{\lambda}_z(s)] = E[E[\hat{\lambda}_z(s) | (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s))]]$

$$\text{et par définition de } \hat{\lambda}_z(s), \quad E[\hat{\lambda}_z(s) | P_{i,z}(s)] = E \left[ \frac{\sum_{i=1}^{d_z(s)} N_{i,z}(s)}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} P_{i,z}(s)} \middle| (\tilde{P}_z(s) = \tilde{p}_z(s)) \right]$$

Comme les  $N_{i,z}$  sont indépendantes et identiquement distribuées de loi  $P(\lambda_z(s) p_{i,z})$  on obtient, encore par propriété de l'espérance :

$$E[\hat{\lambda}_z(s) | P_{i,z}(s)] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s)} \lambda_z(s) \sum_{i=1}^{d_z(s)} p_{i,z}(s) = \lambda_z(s)$$

d'où par passage à l'espérance :  $E[\hat{\lambda}_z(s)] = E[\lambda_z(s)] = \lambda_z(s)$  CQFD.